ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
Institut Nationale de Statistique et d'Economie Appliquée
INSEA

Concours National Commun d'admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées
Session 2009

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Filière MP

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Le sujet est composé de deux problèmes totalement indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Données pour toute l'épreuve

- Masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}\ kg$
- Constante d'attraction universelle : $G = 6,67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
- Accélération de la pesanteur au niveau du sol : $g = 9,81\ m.s^{-2}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
- Masse molaire de l'air : $M_a = 29.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$

Premier problème
Durée des saisons

La saison est une période de l'année qui observe une relative constance du climat et de la température. D'une durée d'environ trois mois, la saison joue un rôle déterminant sur l'état de la végétation qui dépend essentiellement de facteurs climatiques.

D'un point de vue astronomique, une saison correspond à l'intervalle de temps au cours duquel la Terre occupe une portion de l'espace lors de sa gravitation autour du Soleil. C'est l'inclinaison de l'axe des pôles, combinée à la rotation de la Terre autour du Soleil, qui fait qu'il se produit une alternance des saisons. Celles-ci correspondent aux périodes qui séparent le passage de la Terre à certains points de son orbite.

Dans ce problème, on étudie le mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$ centré au centre S du Soleil et supposé galiléen.

$1^{\text{ère}}$ partie
Propriétés générales du mouvement

1.1. Référentiel galiléen

1.1.1. Donner la définition d'un référentiel galiléen.

1.1.2. Définir le référentiel géocentrique. A quelle(s) condition(s) peut-on le considérer comme galiléen ?

1.2. Force et énergie mécanique

La Terre est modélisée par un solide indéformable de forme sphérique que l'on assimilera ici à un point matériel de masse m situé en son centre d'inertie O. Les effets liés à la rotation de la Terre autour de son axe ne sont pas pris en compte dans ce problème.

Le centre d'inertie O de la Terre se déplace dans le champ de gravitation du Soleil de masse M_S sous l'effet de la force :

$$\vec{F}_{S\to O} = -\frac{G\,M_S\,m}{r^3}\vec{r} \tag{1}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{SO}$ étant le vecteur position du centre O de la Terre par rapport au centre S du Soleil. On néglige l'influence des autres planètes sur le mouvement de la Terre.

1.2.1. Le champ de force de l'équation (1) est-il un champ de force central ?

1.2.2. Donner la définition d'une force conservative.

1.2.3. Montrer que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est conservative.

1.2.4. Exprimer l'énergie potentielle E_p dont dérive cette force en fonction de G, M_S, m et r. L'énergie potentielle E_p sera prise conventionnellement nulle pour r tendant vers l'infini.

1.2.5. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la Terre est constante au cours de son mouvement autour du Soleil.

1.3. Moment cinétique

1.3.1. Définir le vecteur moment cinétique $\vec{L}_S$ de la Terre dans le référentiel $\mathcal{R}$, par rapport au centre S du Soleil.

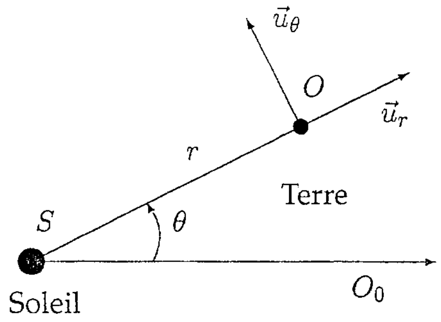
1.3.2. Énoncer le théorème du moment cinétique pour un point matériel.

1.3.3. En appliquant à la Terre le théorème du moment cinétique par rapport au point S, montrer que son moment cinétique $\vec{L}_S$ est un vecteur constant.

1.3.4. En déduire que la trajectoire suivie par la Terre autour du Soleil est entièrement contenue dans un plan fixe Π. Comment est situé le plan de cette trajectoire par rapport au vecteur moment cinétique $\vec{L}_S$?

1.3.5. Pour la suite, on pose : $\vec{L}_S = mC\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire fixe dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$ et C une constante.

Dans le plan Π de sa trajectoire, on repère la position du centre d'inertie de la Terre O en coordonnées polaires (r, θ) définies par $r = SO$ et $\theta = (\overrightarrow{SO_0}, \overrightarrow{SO})$ (figure 1-a). O_0 est la position de O à une date choisie comme origine. $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ étant la base locale associée à ces coordonnées.



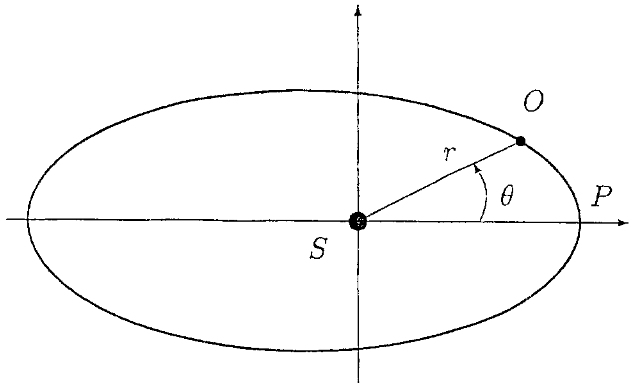


Figure 1-a : repérage de la position de la Terre. **Figure 1-b :** trajectoire de la Terre autour du Soleil.

1.3.5.1. Montrer que la vitesse du centre d'inertie de la Terre par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$$

Donner les expressions de v_r et de v_θ en fonction de r, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1.3.5.2. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_S$ en fonction de m, r et $\dot{\theta}$. En déduire que la constante C est liée aux paramètres r et $\dot{\theta}$ par la relation :

$$C = r^2\dot{\theta}$$

1.3.6. Loi des aires

1.3.6.1. Exprimer l'aire $d\Sigma$, balayée par le rayon-vecteur $\vec{r}$ pendant une durée dt du mouvement de la Terre autour du Soleil.

1.3.6.2. Montrer que l'aire Σ balayée par le rayon-vecteur $\vec{r}$ durant un intervalle de temps Δt est donnée par la loi :

$$\Sigma = \frac{C}{2}\Delta t$$

Comment appelle-t-on cette loi ? Justifier l'appellation de la constante des aires habituellement donnée à C.

2ème partie
Étude de la trajectoire

On pose $u = \frac{1}{r}$ et on rappelle que $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$.

2.1. Exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de C et $\frac{du}{d\theta}$.

2.2. Définir l'énergie cinétique E_c de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique $\mathcal{R}$. En déduire son expression en fonction de m, C, u et $\frac{du}{d\theta}$.

2.3. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m\, C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right) - G\, M_S\, m\, u$$

2.4. Montrer que la conservation de l'énergie mécanique le long de la trajectoire se traduit par deux équations différentielles possibles relatives à $u(\theta)$. On explicitera ces deux équations.

2.5. L'une des deux équations précédentes s'écrit $\frac{du}{d\theta} = 0$. Quelle est la nature de la trajectoire dans ce cas ?

2.6. On montre, par un choix convenable de l'origine des angles polaires que la solution de la deuxième équation peut s'écrire sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{2}$$

avec $p = \frac{C^2}{G\, M_S}$ et $e = p.\, u_0$, où u_0 est une constante d'intégration qu'on ne demande pas de déterminer.

La relation (2) est l'équation polaire d'une conique d'excentricité e. On supposera que $e < 1$ et que la trajectoire est une ellipse dont S est l'un de ses foyers (figure 1-b).

2.6.1. Déterminer la distance SO minimale notée r_m au périhélie P de la trajectoire en fonction de p et e.

2.6.2. Déterminer la distance SO maximale notée r_M à l'aphélie A de la trajectoire en fonction de p et e.

2.6.3. Déterminer l'écart relatif entre ces deux distances défini par $\frac{r_M - r_m}{p}$.

2.6.4. Application numérique : on donne $p = 150.10^6\ km$ et $e = 0,018$. Calculer r_M, r_m et leur écart relatif. Commenter.

3ème partie
Période temporelle du mouvement

On rappelle que la surface d'une ellipse est donnée par $\Sigma = \pi.a.b$, où $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ désignant respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.

Pour toute la suite, on utilisera les valeurs numériques de e et de p données dans la question 2.6.4.

3.1. En utilisant la relation établie en 1.3.6.2., exprimer la période T du mouvement de la Terre autour du Soleil, en fonction de G, M_S, p et e.

3.2. Application numérique : calculer T en jours. Commenter.

Pour l'hémisphère nord de la Terre, le périhélie P de la trajectoire correspond approximativement au début de l'hiver (solstice d'hiver), l'aphélie A de la trajectoire correspond au début de l'été (solstice d'été), le début du printemps ou équinoxe du printemps EP correspond à $\theta = \pi/2$ et le début de l'automne ou équinoxe d'automne EA correspond à $\theta = 3\pi/2$.

3.3. Reproduire le schéma de la trajectoire (figure 1-b) et placer les points A, EP et EA. Indiquer avec soin la surface balayée par le rayon-vecteur de la Terre pendant chacune des quatres saisons.

3.4. Montrer graphiquement que le printemps et l'été sont plus longs que l'automne et l'hiver dans l'hémisphère nord.

3.5. Dans cette section, on utilise la relation établie dans la question 1.3.5.2.

3.5.1. En tenant compte de la valeur de e, montrer que la durée T_h de l'hiver se calcule approximativement par :

$$T_h \simeq \frac{p^2}{C}\int_0^{\pi/2}(1-2e\cos\theta)d\theta$$

3.5.2. Application numérique : calculer T_h en jours.

3.5.3. Montrer de même que la durée T_p du printemps se calcule approximativement par :

$$T_p \simeq \frac{p^2}{C}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-2e\cos\theta)d\theta$$

3.5.4. Application numérique : calculer T_p en jours. Commenter.

3.6. Un modèle plus complexe permet d'établir un calendrier qui fait apparaître les dates approximatives suivantes :

- solstice d'hiver : 21 décembre 2008 à 12h
- équinoxe du printemps : 20 mars 2009 à 12h
- solstice d'été : 21 juin 2009 à 6h
- équinoxe d'automne : 22 septembre 2009 à 21h
- solstice d'hiver : 21 décembre 2009 à 18h

3.6.1. Calculer la durée de la saison d'hiver T'_h et de la saison du printemps T'_p.

3.6.2. Comparer ces valeurs à celles obtenues par le modèle précédent. Commenter. Que pensez vous du modèle utilisé ?

Deuxième problème
Étude de l'équilibre de l'atmosphère dans le champ de pesanteur

L'atmosphère terrestre s'étend sur quelques dizaines de kilomètres et permet à toutes les espèces vivantes terriennes de respirer pour vivre. Les phénomènes physiques intervenant dans l'atmosphère sont nombreux et caractérisent en fait différentes couches en fonction de l'altitude : de la troposphère au niveau du sol jusqu'à l'ionosphère couche d'atmosphère la plus haute avant l'Espace.

On se propose d'étudier quelques modèles de variation de la pression dans l'atmosphère terrestre. Dans tout le problème, on ne tiendra pas compte des effets liés à la rotation de la Terre. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est supposé uniforme, d'intensité égale à sa valeur au niveau du sol. $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire de la direction ascendante Oz.

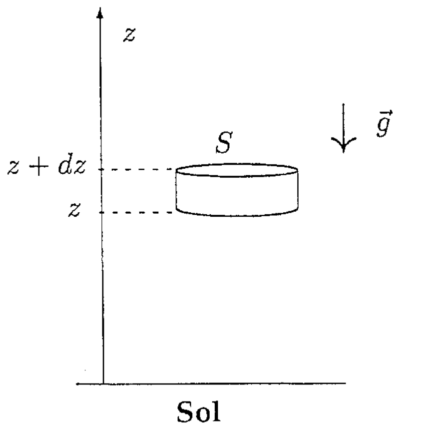


Figure 1 : tranche de fluide dans le champ de pesanteur.

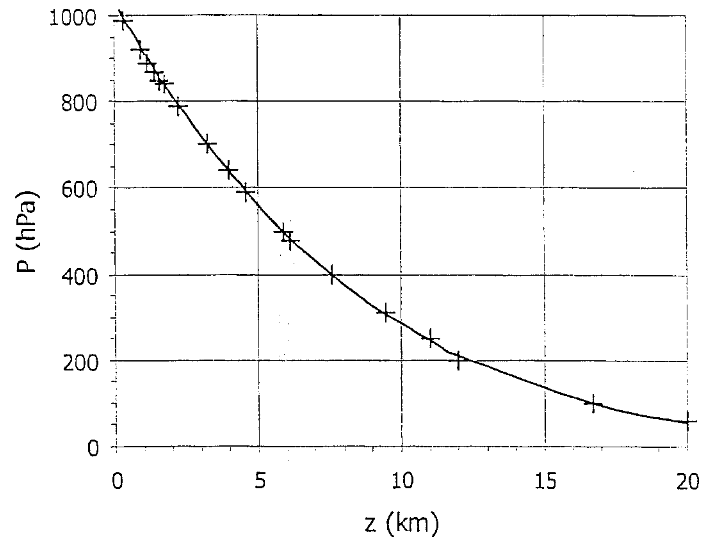


Figure 2 : Profil de pression dans les premières couches de l'atmosphère.

$1^{ère}$ partie

Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur

On considère un fluide au repos dans le champ de pesanteur. On suppose que la pression et la masse volumique du fluide ne dépendent que de l'altitude z. On appelle $P(z)$ cette pression et $\rho(z)$ la masse volumique du fluide. La pression au niveau du sol, pris comme origine des altitudes $z = 0$, vaut $P_0 = 1,0\ bar = 1,0.10^5\ Pa$.

1.1. Déterminer la résultante $d\vec{F}_p$ des forces de pression s'exerçant sur une tranche de fluide de base S, située entre les altitudes z et $z+dz$ (figure 1). En déduire l'expression de la densité volumique des forces de pression.

1.2. Écrire l'équation qui traduit l'équilibre mécanique de la tranche de fluide dans le champ de pesanteur. Montrer que la pression est liée à la masse volumique du fluide par l'équation :

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \qquad (1)$$

1.3. On suppose dans cette question que la masse volumique du fluide est quasi-indépendante de l'altitude. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ qui règne dans le fluide à l'altitude z.

1.4. Ordres de grandeurs

1.4.1. Déterminer la différence de pression entre le sol et le toit d'une salle, situé à une altitude de 3 m, en assimilant l'air à un gaz parfait à la température ambiante $T = 300\ K$. Commenter.

1.4.2. Déterminer la différence de pression entre la surface libre et un point à une profondeur de 3 m d'un océan. Commenter.

$2^{\text{ème}}$ partie
Modèle de l'atmosphère isotherme

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire M_a au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen et soumis au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.

On suppose dans ce paragraphe, que l'atmosphère est isotherme dans laquelle la température est uniforme et vaut $T_0 = 273\ K$. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1,0\ bar = 1,0.10^5\ Pa$. On appelle $P(z)$ la pression qui règne à l'altitude z.

2.1. A partir de l'équation d'état des gaz parfaits, déterminer l'expression de la masse volumique de l'air en fonction de M_a, T_0, de la pression P et de la constante des gaz parfaits R.

2.2. En déduire, en utilisant l'équation (1), l'expression de la pression $P(z)$.

2.3. Interpréter le résultat obtenu en termes énergétiques et mettre en évidence le facteur de BOLTZMANN.

2.4. En déduire une hauteur caractéristique h des variations de la pression $P(z)$. Déterminer la valeur numérique de h. Commenter.

$3^{\text{ème}}$ partie
Modèle de l'atmosphère polytropique

Le modèle de l'atmosphère isotherme ne s'applique qu'à la haute atmosphère appelée stratosphère, pour des couches d'air dont l'altitude est comprise entre 10 km et 30 km, et avec une température de l'ordre de 223 K.

Entre les altitudes $z = 0$ et $z = 10\ km$, l'air est constamment brassé par les courants que constituent les vents dont l'origine est en partie due aux variations journalières de la température au niveau du sol. La partie de l'atmosphère correspondante s'appelle la troposphère.

Les données expérimentales transmises par un ballon-sonde, utilisé par une station météorologique, au cours de la traversée de la troposphère et de la basse stratosphère montrent que le modèle le mieux adapté est celui d'un gradient uniforme de température. Ces données permettent de tracer le profil réel de la pression régnant à la verticale de la station. Les résultats sont rassemblés sur la figure 2. On cherche à modéliser ces résultats en considérant un profil de température de la forme :

$$T(z) = T_0 - a.z$$

T_0 et a étant des paramètres constants.

3.1. Donner l'expression de la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de M_a, T_0, a, z, $P(z)$ et R.

3.2. La pression et la masse volumique sont toujours liées par l'équation (1).

3.2.1. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$P(z) = P_0(1 - b.z)^{\alpha}$$

où b et α sont deux paramètres constants à déterminer.

3.2.2. Comparer ce champ de pression avec celui obtenu pour l'atmosphère isotherme lorsque l'on se place à faible altitude ($b.z << 1$).

3.2.3. Montrer que la pression est liée à la masse volumique par la relation :

$$\frac{P(z)}{\rho(z)^k} = cste$$

appelée relation polytropique d'indice k. Donner l'expression de k en fonction de α.

3.3. Le traitement des données expérimentales, indiquées par des croix sur la figure 2, permet d'ajuster les valeurs de P_0, b et α pour que le modèle décrive correctement les points expérimentaux. On obtient ainsi : $P_0 = 1,03.10^5\ Pa$; $b = 1,95.10^{-5}\ m^{-1}$ et $\alpha = 5,91$. La courbe correspondante est tracée en trait plein sur la figure 2.

3.3.1. Déduire de ces résultats les valeurs de T_0 et de a. En déduire la valeur de la température T à une altitude de 10 km. Conclure quant à la validité de ce modèle pour décrire la troposphère.

3.3.2. Déduire de ce qui précède l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère dans le cadre de ce modèle.

FIN DE L'ÉPREUVE